

2019年天津河西区高三二模理科数学试卷

一、选择题（本大题共8题，每小题5分，共计40分）

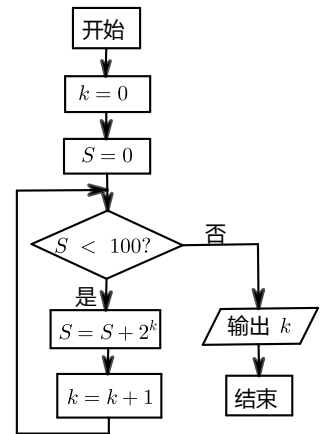
1. 设全集 $U = \{n \in \mathbf{N} | 1 \leq n \leq 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ().

- A. $\{6, 9\}$ B. $\{6, 7, 9\}$ C. $\{7, 9\}$ D. $\{7, 9, 10\}$

2. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \geq 0 \\ x - y \leq 0 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x - y$ 的最小值等于 ().

- A. $-\frac{5}{2}$ B. -2 C. $-\frac{3}{2}$ D. 2

3. 如图所示, 程序框图的输出结果是 ().



- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

4. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 " $q > 1$ " 是 " $\{a_n\}$ " 为递增数列的 ().

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 设 $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{0.5}$, $b = \left(\frac{4}{3}\right)^{0.4}$, $c = \log_{\frac{3}{4}}(\log_3 4)$, 则 ().

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

6. 函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, 其中 φ 为实数, 若 $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(\pi)$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是 ().

- A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$ B. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$
C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$ D. $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$

7. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 有相同的焦点 F , 点 A 是两曲线的一个交点, 若直线 AF 的斜率为 $\sqrt{3}$, 则双曲线的离心率为 ().

- A. $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{7}+3}{3}$ D. $\frac{\sqrt{7}+4}{3}$

8. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $|\overrightarrow{AD}| = 2$, $|\overrightarrow{CD}| = 4$, $\angle ABC = 60^\circ$, E, F 分别是 BC, CD 的中点, DE 与 AF 交于 H , 则 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的值 ().

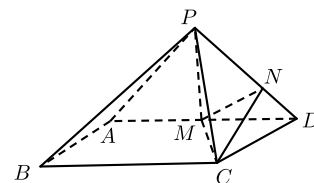
A. 12

B. 16

C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{16}{5}$ **二、填空题（本大题共6题，每小题5分，共计30分）**9. 设 $z = 1 - i$ (i 是虚数单位), 则 $\frac{2}{z} + \bar{z} =$ _____ .10. 三棱锥 $P-ABC$ 中, D, E 分别为 PB, PC 的中点, 记三棱锥 $D-ABE$ 的体积为 V_1 , $P-ABC$ 的体积为 V_2 , 则 $\frac{V_1}{V_2} =$ _____ .11. $\left(3x^2 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 _____ . (用数字作答)**选修4-4：坐标系与参数方程**12. 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases}$ (t 为参数), C 在点 $(1, 1)$ 处的切线为 l , 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 则 l 的极坐标方程为 _____ .13. 若 $\log_4(3a + 4b) = \log_2 \sqrt{ab}$, 则 $a + b$ 的最小值是 _____ .14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} kx + k, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ (其中 $k \geq 0$), 若函数 $y = f[f(x)] + 1$ 有4个零点, 则实数 k 的取值范围是 _____ .**三、解答题（本大题共6题，共计80分）**15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对边的边长分别是 a, b, c .(1) 若 $c = 2, C = \frac{\pi}{3}$ 且 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 $\cos(A + B)$ 和 a, b 的值 .(2) 若 B 是钝角, 且 $\cos A = \frac{3}{5}, \cos A = \frac{3}{5}, \sin B = \frac{12}{13}$, 求 $\sin C$ 的值 .16. 甲, 乙, 丙三位学生独立地解同一道题, 甲做对的概率为 $\frac{1}{2}$, 乙, 丙做对的概率分别为 m, n ($m > n$), 且三位学生是否做对相互独立. 记 ξ 为这三位学生中做对该题的人数, 其分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	a	b	$\frac{1}{24}$

(1) 求至少有一位学生做对该题的概率 .

(2) 求 m, n 的值 .(3) 求 ξ 的数学期望 .17. 如图, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = PD$, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle ABC = 45^\circ$, $AB = AC = 2$, M 为线段 AD 的中点, 点 N 满足 $\overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{ND}$.(1) 求证: 直线 $PB \parallel$ 平面 MNC .(2) 求证: 平面 $MNC \perp$ 平面 PAD .(3) 若平面 $PAB \perp$ 平面 PCD , 求直线 BP 与平面 PCD 所成角的正弦值 .

18. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于0, 前 n 项和 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4$, $a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}$, $a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n , b_n .

(2) 设 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

① 求 T_n .

② 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{(T_{i+1} - b_{i+1})b_{i+3}}{b_{i+1} \cdot b_{i+2}} < \frac{1}{2}$.

19. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的右焦点为 F , 右顶点为 A , 已知 $|OA| - |OF| = 1$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程及离心率 e 的值.

(2) 设过点 A 的直线 $l \perp$ 椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M , 与 y 轴交于点 H , 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA \leq \angle MAO$, 求直线 l 的斜率的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax$ 在点 $(t, f(t))$ 处的切线方程为 $y = 3x - 1$.

(1) 求 a 的值.

(2) 已知 $k \leq 2$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > k\left(1 - \frac{3}{x}\right) + 2x - 1$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

(3) 对于在 $(0, 1)$ 中的任意一个常数 b , 是否存在正数 x_0 , 使得 $e^{f(x_0+1)-3x_0-2} + \frac{b}{2}x_0^2 < 1$? 请说明理由.